Algebra Komputerowa

Macierze Blokowe

Filip Zieliński

2025

Spis Treści

Macierze Blokowe

W poniższych rozważaniach skupimy się na macierzach blokowych 2×2. Wiele wyników da się jednak uogólnić.

Definicja

Rozważmy macierze $A \in \mathcal{M}_{n_1 \times m_1}, B \in \mathcal{M}_{n_1 \times m_2}, C \in \mathcal{M}_{n_2 \times m_1}, D \in \mathcal{M}_{n_2 \times m_2}$ nad ustalonym ciałem K. Wtedy, **Macierzą Blokową** (klatkową) $X \in \mathcal{M}_{n_1+n_2 \times m_1+m_2}$ złożoną z A, B, C, D definiujemy jako $X = (x_{ij})$, gdzie

$$x_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leqslant n_1, \quad j \leqslant m_1 \\ b_{(i)(j-m_1)} & i \leqslant n_1, \quad m_1 < j \leqslant m_1 + m_2 \\ c_{(i-n_1)(j)} & n_1 < i \leqslant n_1 + n_2, \quad j \leqslant m_1 \\ d_{(i-n_1)(j-m_1)} & n_1 < i \leqslant n_1 + n_2 \quad m_1 < j \leqslant m_1 + m_2 \end{cases}$$

Takie macierze zapisujemy jako

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że macierze można dzielić na bloki na wiele sposobów,

$$X = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right]$$

ale zawsze zachodzi
$colA = colC, \quad colB = colD, \quad rowA = rowB, \quad rowC = rowD$

Konwencja

Blok, będący macierzą dowolnych wymiarów wypełnioną samymi zerami oznaczamy jako $\mathbf{0}$.

Definicja

Diagonalną (Przekątniową) macierzą blokową nazywamy macierz blokową D, jeśli da się ją zapisać jako

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$$

KOŁO NAUKOWE

Definicja

Trójkątno-górną macierzą blokową nazywamy macierz blokową U, jeśli da się ją zapisać jako

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$$

Definicja

Trójkątno-dolną macierzą blokową nazywamy macierz blokową L, jeśli da się ją zapisać jako

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

Konwencja

W notacji macierzy blokowej $\mathcal{I}$ może oznaczać macierz jednostkową dowolnego wymiaru.

Uwaga

Macierz jednostkową można zapisać w postaci blokowej jako

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

Obserwacja

Niech X, Y będą macierzami tych samych wymiarów. Jeżeli X, Y podzielimy na bloki odpowiednio *tych samych wymiarów*, to macierze blokowe można dodawać

$$X = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}, \quad X + Y = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{bmatrix}$$

Równie naturalnie, zdefiniowane jest odejmowanie macierzy blokowych jak i mnożenie macierzy przez skalar z ciała.

Twierdzenie

Niech $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie macierzą blokową. Transpozycja macierzy A jest macierzą blokową, zadaną jako

$$A^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

KOŁO NAUKOWE

Twierdzenie

Niech, $X \in \mathcal{M}_{n_1+n_2\times m_1+m_2}$, $Y \in \mathcal{M}_{m_1+m_2\times p_1+p_2}$ będą macierzami nad tym samym ciałem K podzielonymi na bloki w następujący sposób

$$X = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix},$$

gdzie $colA_1 = colC_1 = rowA_2 = rowB_2$ oraz $colB_1 = colD_1 = rowC_2 = rowD_2$.
Wtedy

$$M = XY = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix}$$

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie macierzą blokową o wymiarach:
$A - n \times m, \quad B - n \times k, \quad C - p \times m, \quad D - p \times k$
oraz niech E będzie dowolną macierzą o wymiarach $n \times n$.

Obserwacja

Operacje $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 = E \cdot R_1} \begin{bmatrix} EA & EB \\ C & D \end{bmatrix}$ da się wykonać i da się przedstawić jako złożenie operacji elementarnych na wierszach.

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie macierzą blokową o wymiarach:
$A - n \times m, \quad B - n \times k, \quad C - p \times m, \quad D - p \times k$
oraz niech F będzie dowolną macierzą o wymiarach $n \times p$

Obserwacja

Operacje $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 = R_1 - F \cdot R_2} \begin{bmatrix} A - FC & B - FD \\ C & D \end{bmatrix}$ da się wykonać i da się przedstawić jako złożenie operacji elementarnych na wierszach.

Twierdzenie

Niech $D = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokowo-diagonalną, gdzie D_1, D_2 są blokami kwadratowymi. Macierz D jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze D_1 oraz D_2 są nieosobliwe oraz D^{-1} zadane jest wzorem

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2^{-1} \end{bmatrix}$$

KOŁO NAUKOWE

Twierdzenie

Niech $D = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokowo-diagonalną, gdzie D_1, D_2 są blokami kwadratowymi. Macierz D jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze D_1 oraz D_2 są nieosobliwe oraz D^{-1} zadane jest wzorem

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór najprościej sprawdzić z definicji macierzy odwrotnej. Wkw na istnienie wynika z analizy liczby liniowo niezależnych wierszy lub macierzy. $\square$

KOŁO NAUKOWE

Twierdzenie

Niech $U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną górną, gdzie U_{11}, U_{22} są blokami kwadratowymi. Macierz U jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze U_{11} oraz U_{22} są nieosobliwe oraz U^{-1} zadane jest wzorem

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1} U_{12} U_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & U_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech $U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną górną, gdzie U_{11}, U_{22} są blokami kwadratowymi. Macierz U jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze U_{11} oraz U_{22} są nieosobliwe oraz U^{-1} zadane jest wzorem

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1} U_{12} U_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & U_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór można wyprowadzić z metody Gaussa, natomiast wkw wynika z analizy liczby liniowo niezależnych kolumn i wierszy. □

Twierdzenie

Niech $L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną dolną, gdzie L_{11}, L_{22} są blokami kwadratowymi. Macierz L jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze L_{11} oraz L_{22} są nieosobliwe oraz L^{-1} zadane jest wzorem

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -L_{22}^{-1} L_{21} L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

KOŁO NAUKOWE

Twierdzenie

Niech $L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną dolną, gdzie L_{11}, L_{22} są blokami kwadratowymi. Macierz L jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze L_{11} oraz L_{22} są nieosobliwe oraz L^{-1} zadane jest wzorem

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -L_{22}^{-1} L_{21} L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór można wyprowadzić z metody Gaussa, natomiast wkw wynika z analizy liczby liniowo niezależnych kolumn i wierszy. □

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową, gdzie A, D są kwadratowymi blokami.

Definicja

Jeżeli D jest nieosobliwe, **Dopełnienie Schura** macierzy M względem D definiujemy jako $M/D = A - BD^{-1}C$

Definicja

Jeżeli A jest nieosobliwe, **Dopełnienie Schura** macierzy M względem A definiujemy jako $M/A = D - CA^{-1}B$

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową, gdzie A, D są kwadratowymi blokami.

Twierdzenie

Niech A będzie nieosobliwe. Wtedy M^{-1} istnieje wtedy i tylko wtedy gdy M/A jest odwracalne oraz zachodzi wzór

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór najprościej wyprowadzić z metody Gaussa. □

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową, gdzie A, D są kwadratowymi blokami.

Twierdzenie

Niech D będzie nieosobliwe. Wtedy M^{-1} istnieje wtedy i tylko wtedy gdy M/D jest odwracalne oraz zachodzi wzór

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór najprościej wyprowadzić z metody Gaussa. □

Konwencja

Oznaczmy przez $\mathcal{J}$ macierz kwadratową dowolnego rozmiaru, która ma 1 na odwrotnej przekątnej, a pozostałe elementy są równe 0. Zauważmy, że można zapisać taką macierz w postaci blokowej jako

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{J} \\ \mathcal{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

KOŁO NAUKOWE

Obserwacja

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową, której bloki B, C są blokami kwadratowymi. Zauważmy, że macierz $M\mathcal{J} = \begin{bmatrix} B\mathcal{J} & A\mathcal{J} \\ D\mathcal{J} & C\mathcal{J} \end{bmatrix}$ jest macierzą kwadratową o blokach kwadratowych na głównej przekątnej, zatem można policzyć jej odwrotność przy pomocy wspomnianych wcześniej twierdzeń.

Obserwacja

Macierz odwrotną do macierzy blokowej M posiadającej bloki kwadratowe na przekątnej odwrotnej, możemy wyliczyć z zależności

$$M^{-1} = \mathcal{J}\mathcal{J}^{-1}M^{-1} = \mathcal{J}(M\mathcal{J})^{-1}$$

Twierdzenie

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem i niech R będzie podpierścieniem przemiennym pierścienia $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ macierzy kwadratowych wymiaru n o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$. Rozważmy macierz $M \in \mathcal{M}_{p\times p}(R)$. Zachodzi

$$\det_{\mathbb{K}} M = \det_{\mathbb{K}}(\det_R M)$$

KOŁO NAUKOWE

Twierdzenie

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem i niech R będzie podpierścieniem przemiennym pierścienia $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ macierzy kwadratowych wymiaru n o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$. Rozważmy macierz $M \in \mathcal{M}_{p\times p}(R)$. Zachodzi

$$\det_{\mathbb{K}} M = \det_{\mathbb{K}}(\det_R M)$$

Twierdzenie to ma charakter ogólny - jest eleganackie algebraiczne i praktycznie bezużyteczne, bo posiada pewne ewidentne ograniczenia.

Twierdzenie

Niech będzie dana macierz blokowo-diagonalna $M = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$.

Zachodzi

$$\det M = \det D_1 \cdot \det D_2.$$

Dodatkowo, jeśli oba bloki mają ten sam wymiar zachodzi

$$\det M = \det D_1 \cdot \det D_2 = \det(D_1 D_2).$$

Twierdzenie

Niech będzie dana macierz blokowo-diagonalna $M = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$.

Zachodzi
$$\det M = \det D_1 \cdot \det D_2.$$

Dodatkowo, jeśli oba bloki mają ten sam wymiar zachodzi

$$\det M = \det D_1 \cdot \det D_2 = \det(D_1 D_2).$$

Dowód.

Należy skorzystać z indukcji względem wymiaru macierzy D_1 oraz rozwinięcia Laplace'a. □

Twierdzenie

Niech będzie dana kwadratowa macierz blokowo-górnotrójkątna $M = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$ gdzie bloki U_{11} oraz U_{22} są kwadratowe. Wtedy zachodzi

$$\mathrm{det} M = \mathrm{det} U_{11} \cdot \mathrm{det} U_{22}.$$

Dodatkowo, jeśli ich wymiary są takie same, zachodzi

$$\mathrm{det} M = \mathrm{det} U_{11} \cdot \mathrm{det} U_{22} = \mathrm{det}(U_{11} U_{22}).$$

Twierdzenie

Niech będzie dana kwadratowa macierz blokowo-górnotrójkątna $M = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$ gdzie bloki U_{11} oraz U_{22} są kwadratowe. Wtedy zachodzi

$$\det M = \det U_{11} \cdot \det U_{22}.$$

Dodatkowo, jeśli ich wymiary są takie same, zachodzi

$$\det M = \det U_{11} \cdot \det U_{22} = \det(U_{11} U_{22}).$$

Dowód.

Należy skorzystać z indukcji względem wymiaru macierzy U_{11} oraz rozwinięcia Laplace'a. □

Macierze z blokiem zerowym
Wyznacznik

KOŁO NAUKOWE

Twierdzenie

Niech będzie dana kwadratowa macierz blokowa $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ o wszystkich blokach tego samego rozmiaru. Jeżeli choć jeden blok jest blokiem zerowym, zachodzi

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Twierdzenie

Niech będzie dana kwadratowa macierz blokowa $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ o wszystkich blokach tego samego rozmiaru. Jeżeli choć jeden blok jest blokiem zerowym, zachodzi

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Dowód.

W przypadku, gdy $C = \mathbf{0}$ bądź $B = \mathbf{0}$ wystarczy skorzystać z poprzednich twierdzeń. Natomiast, w przypadku gdy $A = \mathbf{0}$ lub $B = \mathbf{0}$, zauważmy, że

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\mathcal{I} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbf{0} \\ \mathcal{I} & \mathcal{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\mathcal{I} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C & -D \\ A & B \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech będzie dana kwadratowa macierz blokowa $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ o wszystkich blokach tego samego rozmiaru. Jeżeli D jest odwracalna, zachodzi

$$\mathrm{det} M = \mathrm{det}(AD - BD^{-1}CD)$$

Twierdzenie

Niech będzie dana kwadratowa macierz blokowa $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ o wszystkich blokach tego samego rozmiaru. Jeżeli D jest odwracalna, zachodzi

$$\det M = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

Dowód.

Zauważmy, że

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbf{0} \\ -D^{-1}C & \mathcal{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}$$

□

Wniosek

Jeżeli dodatkowo $CD = DC$ to zachodzi $\det M = \det(AD - BC)$

Dopełnienie minora macierzy
Ogólne Twierdzenie Laplace'a

Niech będzie dana macierz kwadratowa $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Niech M będzie minorem wymiaru $p \leqslant n$. Niech

$$j_1 < j_2 \ldots < j_p$$

będą wskaźnikami wierszy, a

$$k_1 < k_2 \ldots < k_p$$

będą wskaźnikami kolumn, z których powstał minor M. Niech $q = n - p$ oraz M_1 będzie minorem wymiaru q powstałym przez wykreślenie wierszy i kolumn należących do minora M.

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym minora M względem macierzy A nazywamy liczbę

$$M^* = (-1)^{\Sigma j + \Sigma k} \cdot M_1 .$$

gdzie $\Sigma j = j_1 + \cdots j_p$ i $\Sigma k = k_1 + \cdots + k_p$.

Fakt

Niech A będzie macierzą zdefiniowaną jak na poprzednich slajdach. Niech $A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ oznacza $i-$ty wiersz macierzy i niech zachodzi

$$A_i = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}.$$

Zachodzi wtedy

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 & \dots & v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & \dots & u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Zdefinujmy macierz A jak na poprzednich slajdach. Rozbijmy macierz A na dwie macierze prostokątne A' oraz A'', z których pierwsza składa się z p pierwszych kolumn, a druga z q ostatnich kolumn.

Lemat

Jeśli w macierzy A' ilość wierszy zawierająca same zera jest większa od q to $\det A = 0$.

Twierdzenie

Ogólne Twierdzenie Laplace'a

KOŁO NAUKOWE

Ogólne Twierdzenie Laplace'a

Niech M przebiega wszystkie minory jakie można utworzyć z dowolnie wybranych i ustalonych kolumn (wierszy) macierzy A, natomiast M^* niech będzie algebraicznym dopełnieniem minora M. Suma wszystkich iloczynów MM^* jest równa $\det A$.

Źródła

1. Inverses and Determinants of $n \times n$ matrices, Müge Saadetoğlu, Şakir Mehmet Dinsev, 2023, *Mathematics*
2. Block Matrix Formulas , John A. Gubner, 2024
3. Elementy Algebry Wyższej, A. Mostowski, M. Stark, *Wydawnictwo Naukowe PWN*