Lista Zadań 01 – Podstawowe własności Struktur Algebraicznych

Filip Zieliński

19 marca 2025

W zadaniach 1–4 stwierdź, czy podane działanie jest wewnętrzne.

1. Rozważmy zbiór $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych o dziedzinie i przeciwdziedzinie rzeczywistej. Definiujemy działanie $+ : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ jako $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (sumowanie po wartościach). Czy to działanie jest dobrze zdefiniowane (wewnętrzne)?

2. Rozważmy zbiór $LF(V, \mathcal{K})$ odwzorowań liniowych przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ w samą siebie. Definiujemy działanie $+ : LF(V, \mathbb{K}) \times LF(V, \mathbb{K}) \to LF(V, \mathbb{K})$ jako dodawanie po wartościach. Czy to działanie jest dobrze zdefiniowane (wewnętrzne)?

3. Rozważmy zbiór $H((G, +))$ endomorfizmów grupy G. Definiujemy działanie $+ : H((G, +)) \times H((G, +)) \to H((G, +))$ jako dodawanie po wartościach. Czy to działanie jest dobrze zdefiniowane (wewnętrzne)?

4. Rozważmy zbiór $F\uparrow(\mathbb{R})$ funkcji rosnących o dziedzinie i przeciwdziedzinie rzeczywsitej. Definujemy działanie $+ : F\uparrow(\mathbb{R}) \times F\uparrow(\mathbb{R}) \to F\uparrow(\mathbb{R})$ jako dodawanie po wartościach. Czy takie działanie jest dobrze zdefiniowane (wewnętrzne)?

W zadaniach 5–10 odnosimy się do grupy $(G, \cdot)$.

5. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden element neutralny w G.

6. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden element symetryczny dla każdego elementu w G.

7. Wykaż, że dla każdego $a \in G$ zachodzi $(a^{-1})^{-1} = a$.

8. Wykaż, że dla każdego $a, b \in G$ zachodzi $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

9. Wykaż, że jeżeli dla każdego $a \in G$ zachodzi $aa = e$ to G jest grupą abelową.

10. Niech $(H, +)$ będzie grupą oraz $f : G \to H$ będzie homomorfizmem grup. Wykaż, że $\ker_f < G$ (jądro jest podgrupą G).

11. Podaj przykład struktury z działaniem przemiennym, ale nie łącznym.

W zadaniach 12–14 odnosimy się do pierścienia $(R, +, \cdot)$

12. Wykaż, że dla każdego $a, b \in R$ zachodzi $a(-b) = -(ab) = (-a)b$.

13. Wykaż, że dla każdego $a, b \in R$ zachodzi $(-a)(-b) = ab$.

14. * Wykaż, że jeżeli R jest skończonym pierścieniem całkowitym, to jest też ciałem.

15. * Wykaż, że jedynym automorfizmem $\mathbb{Q}$ jako ciała jest identyczność.

W zadaniach 16–21 dana jest funkcja $f : X \to Y$ oraz $A, B \subseteq X$ i $C, D \subseteq Y$.

16. Wykaż, że $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

17. Wykaż, że $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

18. Wykaż, że $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.

19. Wykaż, że $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

20. Wykaż, że $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

21. Wykaż, że $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

22. Wykaż, że funkcja $f : X \to Y$ jest iniekcją wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $A, B \subseteq X$ zachodzi równość $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.