Lista Zadań 02 – Elementy Teorii Grup

Filip Zieliński

28 marca 2025

Grupy Cykliczne

1. Czy cykliczna jest grupa $(\mathbb{Z}, \star)$, gdzie działanie $\star$ określone jest wzorem $a \star b = a + b + 5$.
2. Udowodnić, że dla $n > 1$ grupa $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ nie jest cykliczna.
3. Udowodnić, że jeśli $\mathrm{NWD}(m, n) > 1$, to grupa $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ nie jest cykliczna.
4. Udowodnić, że dla każdego $a \in G$ zachodzi $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(a^{-1})$.
5. Udowodnić, że jeśli G jest grupą abelową, to zbiór $T(G) = \{a \in G \mid \mathrm{ord}(a) < \infty\}$ jest podgrupą grupy G. (Nazywamy ją *podgrupą torsyjną grupy* G.)
6. Udowodnić, że jeśli $\varphi : G \to H$ jest homomorfizmem grup oraz $\varphi(a) = b$ i $\mathrm{ord}(a) < \infty$ to $\mathrm{ord}(b) \mid \mathrm{ord}(a)$. Udowodnić, że jeśli φ jest izomorfizmem, to zachodzi $\mathrm{ord}(b) = \mathrm{ord}(a)$.
7. Udowodnić, że obraz homomorficzny grupy cyklicznej jest grupą cykliczną.

Warstwy

8. Udowodnić, że zbiór odwrotności elementów z warstwy aH to dokładnie warstwa Ha^{-1}.

Podgrupy Normalne

9. Niech G bedzie grupą oraz $H < G$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne
   - $\forall a \in G \quad aH = Ha$
   - $\forall a \in G \quad aHa^{-1} = H$
   - $\forall a \in G \quad aHa^{-1} \subseteq H$
10. Centrum grupy G oznaczamyy przez $Z(G)$ i definiujemy jako

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall a \in G \ ag = ga\}.$$

Udowodnić, że $Z(G) \trianglelefteq G$ dla każdej grupy G.

11. Niech G będzie grupą oraz $H \trianglelefteq G$ i $F < G$. Zdefiniujmy zbiór HF jako $HF = \{hf \in G \mid h \in H \wedge f \in F\}$ oraz zbiór FH analogicznie. Udowodnić, że

   - $HF < G$,
   - $FH < G$,
   - jeżeli dodatkowo $F \trianglelefteq G$, to $HF \trianglelefteq G$.

12. Sprawdzić, że jeśli S jest niżej podanym podzbiorem zbioru R^* oraz $H = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A \in S\}$ to $H \trianglelefteq G$
   a) $\mathbb{R}^+$, b) Q^*, c) Q^+, d) $\{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

13. Niech będzie dany niepusty zbiór T oraz grupa G. Udowodnić, że

   - jeśli $H_t < G$ dla każdego $t \in T$, to $\bigcap_{t \in T} H_t < G$,
   - jeśli $H_t \trianglelefteq G$ dla każdego $t \in T$, to $\bigcap_{t \in T} H_t \trianglelefteq G$.